

### **3. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ**

Основным назначением механизма является выполнение им необходимых движений, которые описываются посредством кинематических характеристик. К ним относятся траектории точек, координаты точек и звеньев механизма, перемещения точек и звеньев, а также их скорости и ускорения. Вышеназванные кинематические характеристики мы будем находить графическими методами, которые позволяют определить положения звеньев, скорости и ускорения точек и звеньев достаточно быстро и для большинства практических задач достаточно точно (0,3-0,5%). Кроме того, они обладают большой наглядностью. Графические методы становятся непригодными, если требуется провести большой объем однообразных решений с очень высокой степенью точности.

#### **3.1. Планы механизма**

Изображение кинематической схемы механизма в выбранном масштабе, соответствующее определенному положению входного звена, называется планом механизма. Масштаб плана механизма определяется отношением числового значения длины изображаемого звена в метрах к длине отрезка на плане в мм, т. е.

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB}, \text{ где } [l_{AB}] = \text{м}; \quad [AB] = \text{мм}; \quad [\mu_l] = \text{м/мм}$$

#### **3.2. Планы скоростей и ускорений**

Планом скоростей механизма называют чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и по направлению скоростям различных точек звеньев механизма в данный момент. План скоростей для механизма является совокупностью нескольких планов скоростей для отдельных групп Ассур, а значит, и отдельных звеньев.

Чертеж, на котором изображены в виде отрезков векторы, равные по модулю и направлению ускорениям различных точек звеньев механизма в данный момент, называют планом ускорений механизма. Векторы, имеющие начало в полюсе плана скоростей или ускорений, называются абсолютными.

При построении планов скоростей и ускорений будем использовать известные из теоретической механики теоремы о сложении скоростей и ускорений.

Теорема сложения скоростей при сложном движении точки формулируется так: абсолютная скорость  $V_a$  точки равна геометрической сумме переносной  $V_e$  и относительной  $V_r$  скоростей этой точки, т.е:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r$$

При плоскопараллельном движении звена переносное движение является поступательным со скоростью произвольно выбранной точки звена, принятой за плюс, а относительное движение является вращательным вокруг этой точки. Угол и направление поворота от выбора полюса не зависят.

Абсолютное ускорение  $\bar{a}_a$  любой точки звена при плоскопараллельном движении твердого тела равно геометрической сумме двух ускорений: ускорения  $a_e$  в поступательном переносном движении и ускорения  $\bar{a}_r$  во вращательном относительном движении

$$\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r = \bar{a}_e + \bar{a}_r^n + a_r^t,$$

где  $\bar{a}_r^n$  – нормальное ускорение в относительном движении, направленное по радиусу вращения точки к центру кривизны траектории;  
 $a_r^t$  – касательное ускорение, направленное перпендикулярно радиусу вращения.

### 3.2.1. Методика построения планов скоростей и ускорений для групп Ассур II класса

Построение планов скоростей и ускорения для групп Ассур II класса рассмотрим на примерах конкретных механизмов.

**Пример 1.** Дан механизм соломонабивателя (рис. 3.1а). Известно: угловая скорость входного звена  $\omega_1 = 6$  рад/с; длины звеньев  $l_{O_1A} = 0,25$  м,  $l_{AB} = 1,2$  м,  $l_{BO_3} = 0,6$  м,  $l_{AC} = 0,2l_{AB}$ . Определить скорость и ускорение точки С, а также угловую скорость  $\omega_2$  и угловое ускорение  $\varepsilon_2$  звена 2. Данный механизм состоит из одной группы Ассур II кл. 1-го вида (звенья 2, 3) и входного звена  $O_1A$  со стойкой 4.

**Построение плана скоростей.** Движение точки В разложим на переносное поступательное со скоростями точек А и  $O_3$  и относительное вращательное соответственно вокруг точек А и  $O_3$ . Тогда векторные уравнения для скорости точки В будут иметь вид:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}, \bar{V}_B = \bar{V}_{O_3} + \bar{V}_{BO_3}, \text{ где } \bar{V}_{O_3} = 0$$

Приравниваем правые части этих уравнений

$$\bar{V}_A + \bar{V}_{BA} = \bar{V}_{BO_3} \quad (3.1)$$

В уравнении (3.1) все скорости известны по направлению:  $\bar{V}_A \perp O_1A$ ,  $\bar{V}_{BA} \perp BA$ ,  $\bar{V}_{BO_3} \perp BO_3$ . Известна также величина скорости точки  $A$   $V_A = \omega_1 \cdot l_{O_1A} = 6 \cdot 0,25 = 1,5 \text{ м/с}$ .

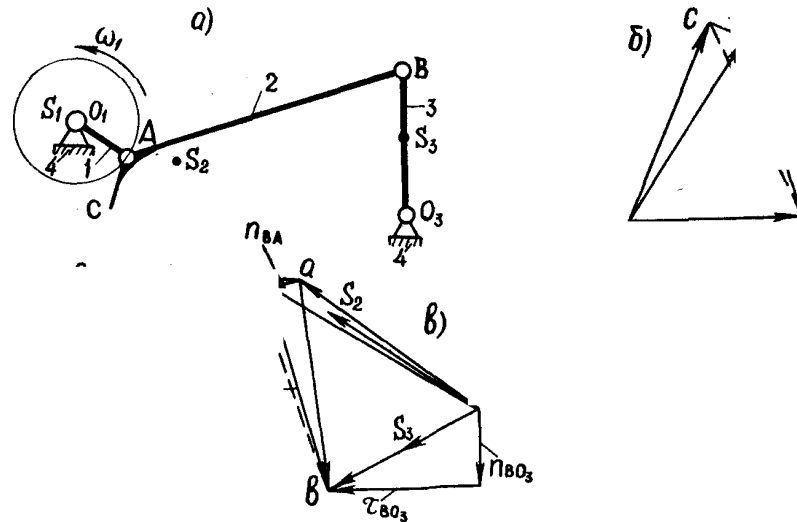


Рис. 3.1. Схема шарнирного четырехзвенного механизма соломонабивателя, его планы скоростей и ускорений

Величины скоростей  $V_{BA}$ ,  $V_{BO_3}$  найдем построением плана скоростей. Выбираем в качестве полюса плана скоростей точку  $p$  (рис. 3.1, б) и откладываем от нее отрезок  $pa = 30 \text{ мм}$  перпендикулярно кривошипу  $O_1A$ .

Через точку  $a$  вектора  $\bar{pa}$  проводим прямую перпендикулярную направлению  $BA$ , а из полюса  $p$  проводим перпендикуляр к оси звена  $O_3B$ .

В пересечении получаем искомую точку  $b$ . Скорость точки  $C$  определяем по правилу подобия. Для этого на стороне  $\bar{ba}$  строим  $\Delta bac$  подобный  $\Delta BAC$ . Соединяем точку  $c$  с полюсом  $p$ . Масштаб плана скоростей равен:

$$\mu_v = \frac{V_A}{pa} = \frac{1,5}{43} = 0,35 \frac{\text{м}}{\text{мм} \cdot \text{с}}$$

$$V_B = V_{BO_3} = \mu_v \cdot pb = 0,035 \cdot 35 = 1,38 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad V_{BA} = \mu_v \cdot ba =$$

$$= 0,035 \cdot 36 = 1,26 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad V_C = \mu_v \cdot pc = 0,035 \cdot 42 = 1,47 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

**Построение плана ускорений.** При определении ускорений следует помнить, что в группах Ассура II класса 1-го вида всегда известны ускорения внешних пар. В нашем случае  $a_{O_3} = 0$ ,  $a_A = \omega_1^2 \cdot l_{O_1A} = 6^2 \cdot 0,25 = 9 \text{ м/с}^2$ . Полное ускорение точки  $A$  является нормальным, так как  $\omega_1 = \text{const} = 6 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Для определения ускорения  $a_B$  точки  $B$ , как и для определения скорости  $v_B$  точки  $B$ , рассматриваем ее движение, как сложное, состоящее из переносного поступательного с ускорениями  $a_A$  и  $a_{O_3}$  и относительного вращательного вокруг точек  $A$  и  $O_3$ . Тогда векторные уравнения для определения ускорения точки  $B$  будут следующими:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau; \quad \bar{a}_B = \bar{a}_{O_3} + \bar{a}_{BO_3}^n + \bar{a}_{BO_3}^\tau, \quad \text{где } \bar{a}_{O_3} = 0$$

Приравнивая правые части этих уравнений, получаем:

$$\bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n = \bar{a}_{BO_3}^n + \bar{a}_{BO_3}^\tau \quad (3.2)$$

В этом уравнении известны направления всех векторов:

$$\bar{a}_A \parallel AO_1; \quad \bar{a}_{BA}^n \parallel BA; \quad \bar{a}_{BA}^\tau \perp BA; \quad \bar{a}_{BO_3}^n \parallel BO_3; \quad \bar{a}_{BO_3}^\tau \perp BO_3$$

Величины нормальных ускорений всегда можно найти, если построен план скоростей:

$$a_{BA}^n = \frac{V_{BA}^2}{l_{BA}} = \frac{1,26^2}{1,2} = 1,32 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; \quad a_{BO_3}^n = \frac{V_{BO_3}^2}{l_{BO_3}} = \frac{1,38^2}{0,6} = 3,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Тангенциальные ускорения в выражении (3.2) найдем построением плана ускорений. Из точки  $\pi$ , принимаемой за полюс (рис. 3.1 в), проводим отрезок  $\pi a = 45$  мм, тогда масштаб  $\mu_a = \frac{a_a}{\pi a} = \frac{9}{45} \frac{\text{м}}{\text{с}^2} / \text{мм}$ .

Вычисляем длины векторов  $\bar{n}_{BA}$  и  $\bar{n}_{BO_3}$ , изображающие на плане ускорений ускорения  $\bar{a}_{BA}^n$  и  $\bar{a}_{BO_3}^n$ .

$$n_{BA} = \frac{a_{BA}^n}{\mu_a} = \frac{1,32}{0,2} = 6,6 \text{ мм}, \quad n_{BO_3} = \frac{a_{BO_3}^n}{\mu_a} = \frac{3,2}{0,2} = 1,6 \text{ мм}$$

Через точку  $a$  вектора  $\bar{\pi a}$  проводим вектор  $\bar{n}_{BA} = 7$  мм параллельно направлению  $BA$ . Из конца вектора  $\bar{n}_{BA}$  проводим прямую, перпендикулярную к направлению  $BA$ . Из полюса  $\pi$  проводим вектор  $\bar{n}_{BO_3} = 16$  мм параллельно оси звена  $BO_3$ , а через конец вектора  $\bar{n}_{BO_3}$  - перпендикуляр к оси звена  $BO_3$ . Точка  $b$  пересечения двух прямых определит длины векторов  $\bar{\tau}_{BA}$  и  $\bar{\tau}_{BO_3}$ . Модули ускорений  $\bar{a}_{BA}^\tau$  и  $\bar{a}_{BO_3}^\tau$  равны:

$$a_{BA}^\tau = \mu_a \cdot \bar{\tau}_{BA} = 0,2 \cdot 44 = 8,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$a_{BO_3}^\tau = \mu_a \cdot \bar{\tau}_{BO_3} = 0,2 \cdot 32 = 6,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Угловые ускорения  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  определяем через тангенциальные:

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^r / l_{BA} = 8,8 / 1,2 = 7,3 \text{ рад/с}^2$$

$$\varepsilon_3 = a_{BO_3}^r / l_{BO_3} = 6,4 / 0,6 = 10,7 \text{ рад/с}^2$$

Ускорения центров масс звеньев 2 и 3 определяем по правилу подобия, их модули равны:

$$a_{S_2} = \mu_a \cdot \bar{\pi}_{S_2} = 0,2 \cdot 38 = 7,6 \text{ рад/с}^2$$

$$a_{S_3} = \mu_a \cdot \bar{\pi}_{S_3} = 0,2 \cdot 18 = 3,6 \text{ рад/с}^2$$

**Пример 2.** Дан механизм строгального станка (рис. 3.2 а). Известно: угловая скорость  $\omega_1 = 3$  рад/с, длины звеньев —  $l_{AO_1} = 0,2$  м,  $l_{BO_3} = 0,78$  м,  $l_{CB} = 0,17$  м. Методом планов определить скорости точек  $B$ ,  $C$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ , а также ускорение точки  $B$ .

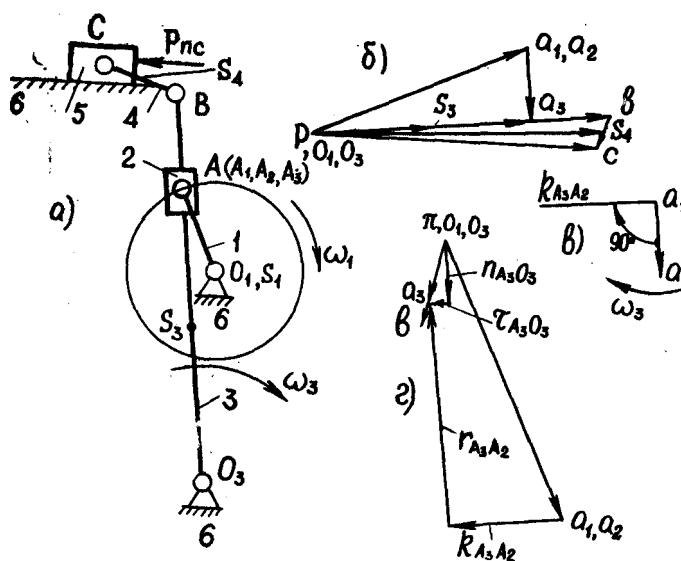


Рис. 3.2. Схема кулисного механизма строгального станка, его планы скоростей и ускорений

Данный механизм, как было рассмотрено выше, состоит из двух групп Ассур II класса 2-го вида (звенья 4, 5), II класса 3-го вида (звенья 2, 3) и входного звена 1 со стойкой 6.

### Построение планов скоростей для группы Ассур II класса 3-го вида

Обозначим через  $A_1$  на схеме механизма точку  $A$ , принадлежащую звену 1,  $A_2$  - звену 2 и  $A_3$  - звену 3. Согласно теореме о плоском движении записываем уравнения:

$$\bar{V}_{A_3} = \bar{V}_{A_2} + \bar{V}_{A_3A_2}, \quad V_{A_3} = V_{O_3} + V_{A_3O_3}, \quad \text{здесь } V_{O_3} = 0$$

Приравниваем правые части, так как равны левые, получаем

$$\bar{V}_{A_2} + \bar{V}_{A_3A_2} = \bar{V}_{A_3O_3} \quad (3.4)$$

В этом уравнении известны все направления векторов

$$\bar{V}_{A_2} \parallel O_1A, \quad \bar{V}_{A_3A_2} \parallel BO_3, \quad \bar{V}_{A_3O_3} \perp BO_3$$

Скорости точек  $A_1$  и  $A_2$  известны и по модулю

$$V_{A_2} = V_{A_1} = \omega_1 l_{O_1A} = 3 \cdot 0.2 = 0.6 \frac{M}{c}$$

Из полюса  $p$  проводим вектор длиной 45 мм перпендикулярно к звену  $O_1A$ . Из точки  $a_1$  проводим прямую, параллельную направлению  $BO_3$ , а из полюса  $p$  - прямую, перпендикулярную направлению  $BO_3$ . Точка пересечения этих прямых - есть искомая точка  $a_3$ . Положения точек  $b$  и  $S_3$  на плане скоростей находим из условия пропорциональности отрезков:

$$\frac{ps_3}{pa_3} = \frac{S_3O_3}{AO_3}, \text{ откуда}$$

$$pb = pa_3 \cdot \frac{BO_3}{AO_3} = \frac{44 \cdot 78}{57} = 60 \text{ мм}, \quad ps_3 = \frac{pa_3 \cdot S_3O_3}{AO_3} = \frac{44 \cdot 31}{57} = 23,9 \text{ мм}$$

Значения длин отрезков подставляем в уравнения в мм, взяв их с плана скоростей и плана механизма.

### Построение планов скоростей группы Ассур II класса 2-го вида

Построение планов скоростей группы Ассур II класса 2-го вида проводим, как в примере выполнения проекта, согласно уравнению

$$\bar{V}_C = \bar{V}_B + \bar{V}_{CB} \quad (3.5)$$

В этом уравнении направления всех векторов известны:  $\bar{V}_C \parallel (x-x)$ ,  $\bar{V}_{CB} \perp CB$ . Из точки  $b$  вектора  $\bar{pb}$  плана скоростей проводим перпендикуляр к звену  $CB$ , а из полюса  $p$  - горизонтальную прямую. В пересечении получим искомую точку  $c$ .

$$V_C = \mu_v \cdot pc = 0.13 \cdot 57 = 7.41 \frac{M}{c}, \quad V_{CB} = \mu_v \cdot cb = 0.13 \cdot 7 = 0.9 \frac{M}{c}$$

### Построение планов ускорений группы Ассур II класса 3-го вида

Особенность такой группы Ассур заключается в том, что переносным движением является вращательное движение кулисы 3 вокруг точки  $O_3$ , а поступательным является движение камня 2 по кулисе 3. Из этого следует, что абсолютное ускорение точки  $A_3$  равно сумме трех ускорений: переносного, относительного и кориолисова. Выпишем векторное уравнение для построения плана ускорений. Ускорения внешних пар (шарниров)  $A_1$  и  $O_3$  известны по модулю.

$$a_{A_1} = a_{A_1O_1}^n = a_{A_2} = \omega_1^2 \cdot l_{O_1A} = 3^2 \cdot 0.2 = 1.8 \frac{M}{c^2}, \quad a_{O_3} = 0$$

Неизвестно ускорение точки  $A_3$  во внутренней поступательной паре.

$$\bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{A_2} + \bar{a}_{A_3A_2}^{-k} + \bar{a}_{A_3A_2}^{-r}, \quad \bar{a}_{A_3} = \bar{a}_{O_3} + \bar{a}_{A_3O}^{-n} + \bar{a}_{A_3O}^{-\tau}$$

Приравниваем правые части этих уравнений, так как равны левые.

$$\bar{a}_{A_2} + \bar{a}_{A_3A_2}^{-k} + \bar{a}_{A_3A_2}^{-r} = \bar{a}_{A_3O}^{-n} + \bar{a}_{A_3O}^{-\tau}, \quad (3.6)$$

где  $\bar{a}_{A_2} = \bar{a}_{A_1}$  — нормальное ускорение точки  $A_1$  при ее движении вокруг точки  $O_1$ ;

$\bar{a}_{A_3A_2}^{-k}$  - кориолисово ускорение;

$\bar{a}_{A_3A_2}^{-r}$  - относительное ускорение поступательного движения кулисы 3 относительно камня 2;

$\bar{a}_{A_3O}^{-n}$  - нормальное ускорение точки  $A_3$  кулисы 3 в ее вращательном движении вокруг точки  $O_3$ ;

$\bar{a}_{A_3O}^{-\tau}$  - тангенциальное ускорение точки  $A_3$  кулисы 3 в ее вращательном движении вокруг точки  $O_3$ .

В уравнении (3.6) направления всех векторов известны

$$\bar{a}_{A_2} \parallel AO_1, \quad \bar{a}_{A_3A_2}^{-k} \perp BO_3, \quad \bar{a}_{A_3A_2}^{-r} \parallel BO_3, \quad \bar{a}_{A_3O}^{-n} \parallel BO_3, \quad \bar{a}_{A_3O}^{-\tau} \perp BO_3$$

Для определения направления кориолисова ускорения необходимо вектор относительной скорости  $\bar{V}_{A_3A_2}$ , повернуть вокруг его начала на  $90^\circ$  в направлении угловой скорости кулисы 3 (рис. 3.2 в). Найдем величины ускорений  $\bar{a}_{A_3A_2}^{-k}$ ,  $\bar{a}_{A_3A_2}^{-n}$

$$a_{A_3A_2}^k = 2 \cdot \omega_3 \cdot V_{A_3A_2} = 2 \cdot 1 \cdot 0,195 = 0,39 \frac{M}{c^2},$$

$$\text{где } \omega_3 = \frac{V_B}{l_{BO_3}} = \frac{\mu_V \cdot p\bar{b}}{l_{BO_3}} = \frac{0,013 \cdot 60}{0,78} = 1 \frac{рад}{c};$$

$$V_{A_3A_2} = \mu_V \cdot \overline{a_3 a_1} = 0,013 \cdot 15 = 0,195 \frac{M}{c}$$

$$a_{A_3O_3}^n = \omega_3^2 \cdot l_{O_3A} = \omega_3^2 \cdot \mu_l \cdot AO_3 = 1^2 \cdot 58 \cdot 0,012 = 0,68 \frac{M}{c^2}$$

где  $\mu_l$  - масштаб плана механизма,  $\mu_l = \frac{l_{AO_1}}{AO_1} = \frac{0,2}{17} = 0,012 \frac{M}{мм}$ . Вычислим

масштабные отрезки ускорений  $a_{A_3A_2}^k$  и  $a_{A_3O_3}^n$

$$k_{A_3A_2} = \frac{a_{A_3A_2}^k}{\mu_A} = \frac{0,39}{0,03} = 13 \text{ мм};$$

$$n_{A_3O_3} = \frac{a_{A_3O_3}^n}{\mu_A} = \frac{0,68}{0,03} = 22,6 \text{ мм}$$

$$\text{где } \mu_A = \frac{a_{A_1}}{\pi a_1} = \frac{1,8}{60} = 0,03 \frac{M}{c^2} / \text{мм}.$$

Из полюса  $\pi$  (рис. 3.2 г) проводим вектор  $\pi a_1 = 60$  мм параллельно звену  $O_1A$  от точки  $A$  к точке  $O_1$ . Из конца вектора  $\pi a_1$  проводим вектор

$\bar{k}_{A_3A_2} = 13\text{мм}$ , далее, через конец которого прямую, параллельную звену  $BO_3$ . Построение левой части уравнения (3.6) закончили. Начинаем построение правой части. Из полюса  $\pi$  плана ускорений проводим вектор  $\bar{n}_{A_3O_3}$  параллельно звену  $BO_3$  в направлении от точки  $A_3$  к точке  $O_3$ . Через конец вектора  $\bar{n}_{A_3O_3}$ , проводим прямую, перпендикулярную звену  $O_3B$ . Точка  $a_3$  пересечения прямых определит величины отрезков  ${}^{\pi}A_3O_3$ ,  $\bar{r}_{A_3A_2}$ . Длину вектора  $\bar{\pi b}$  на плане ускорений находим из пропорциональности отрезков  $\pi b / \pi a_3 = BO_3 / AO_3$ , откуда

$$\pi b = \pi a_3 \cdot BO_3 / AO_3 = 13 \cdot 78 / 57 = 17,8\text{мм}.$$

Ускорение точки  $C$  звена 5 можно найти, построив план ускорений для группы Ассур II класса 2-го вида.